Μαθημα 8ο 27/3/2017

Τοπολογια.

Θυμαμαι.... (σελ 35)

$(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2), \ldots, (E_n,\rho_n)$ μ.χ.

Οριζουμε $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Παιρνουμε δυο στοιχεια $a=(a_1,\ldots,a_n) \in E$ και $b=(b_1,\ldots,b_n) \in E$ και οριζουμε την αποσταση:

$\rho = (a,b) = \sqrt{\rho_1^2(a_1,b_1)+\ldots+\rho_n^2(a_n,b_n)}$ τοτε το συνολο (E,ρ) ονομαζεται καρτεσιανος μ.χ

Εφαρμογη σελ 35

1. $B\left(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \times B\left(a_2, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \times \ldots \times B\left(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B(a,r)$ με $r>0$

2. $B(a,r) \subseteq B(a_1,r_1) \times B(a_2,r_2) \times \ldots \times B(a_n,r_n)$, $r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$

Αποδειξη

ν διατεταγμενη n-αδα

1. Εστω $x \in B\left(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \times \ldots \times B\left(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$, τοτε $x=(x_1,\ldots,x_n)$

οπου $x_1 \in B\left(a_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right), \ldots, x_n \in B\left(a_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow$

$\rho_1(x_1,a_1) < \frac{r}{\sqrt{n}}, \ldots, \rho_n(x_n,a_n) < \frac{r}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\rho_1^2(x_1,a_1)+\rho_2^2(x_2,a_2)+\ldots+\rho_n^2(a_n,x_n) < \underbrace{\frac{r^2}{n}+\ldots+\frac{r^2}{n}}_{n\text{-φορες}} = n \cdot \frac{r^2}{n} = r^2$

$\Rightarrow \sqrt{\rho_1^2(x_1,a_1)+\ldots+\rho_n^2(x_n,a_n)} < \sqrt{r^2} \Rightarrow \rho(x,a) < r \Rightarrow x \in B(a,r)$

Συνεπως ισχυει η σχεση υποσυνολου της 1.

2. Εστω $x \in B(a,r) \Rightarrow \rho(x,a) < r \Rightarrow \rho_1^2(x_1,a_1)+\ldots+\rho_n^2(x_n,a_n) < r^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_1^2(x_1,a_1) < r^2 \\ \ldots \\ \rho_n^2(x_n,a_n) < r^2 \end{cases} \xRightarrow{r=\min\{r_1,\ldots,r_n\}}$$

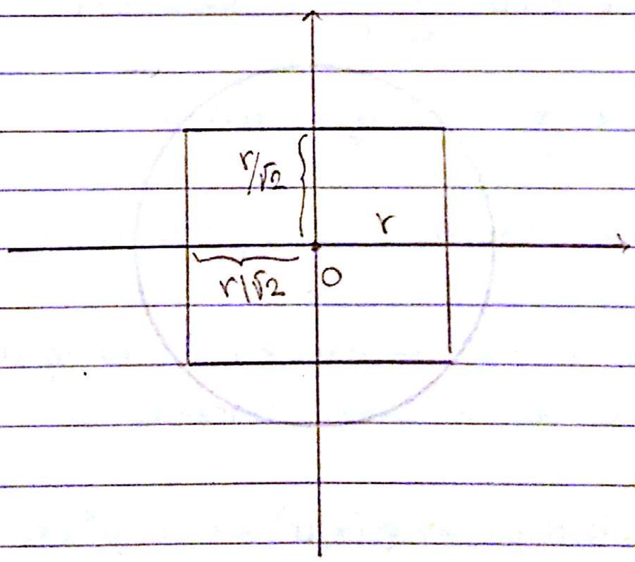
$$\begin{cases} \rho_1^2(x_1,a_1) < r_1^2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \rho_n^2(x_n,a_n) < r_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1(x_1,a_1) < r_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \rho_n(x_n,a_n) < r_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \in B(a_1,r_1) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \in B(a_n,r_n) \end{cases} \Rightarrow (x_1,\dots,x_n) \in B(a_1,r_1)\times\dots\times B(a_n,r_n)$$

Συνεπως καταληξαμε στο ζητουμενο

Κατανοηση Γεωμετρικα

$$B\left(0,\frac{r}{\sqrt2}\right)\times B\left(0,\frac{r}{\sqrt2}\right) \subset B(0,r)$$



Scanned by CamScanner

Εφαρμογή

$A_1 \subseteq E_1, \ldots, A_n \subseteq E_n$, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, Τότε ισχύουν τα εξής

1. $A^o = A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^o$
2. $\bar{A} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \ldots \times \bar{A}_n = \overline{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)}$

Απόδειξη

1. Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A_1^o \times \ldots \times A_n^o \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 \in A_1^o \\ \vdots \\ x_n \in A_n^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists r_1 > 0)\ B(x_1, r_1) \subseteq A_1 \\ \vdots \\ (\exists r_n > 0)\ B(x_n, r_n) \subseteq A_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$B(x_1, r_1) \times \ldots \times B_n(x_n, r_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n = A \xrightarrow[\text{το (2) για } r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}]{\text{εφαρμογή πριν}}$$

$$B(x, r) \subseteq B(x_1, r_1) \times \ldots \times B(x_n, r_n) \in A \Rightarrow$$

$$x \in A^o = (A_1 \times \ldots \times A_n)^o$$

Συνεπώς δείξαμε ότι $A_1^o \times \ldots \times A_n^o \subseteq (A_1 \times \ldots \times A_n)^o$

Θ.δ.ο $(A_1 \times \ldots \times A_n)^o \subseteq A_1^o \times \ldots \times A_n^o$

Έστω τυχόν x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in (A_1 \times \ldots \times A_n)^o \Rightarrow (\exists r > 0) : B(x, r) \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$

Από το (1) της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε ότι

$$B\left(x_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \times \ldots \times B\left(x_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq B(x, r) \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n \Rightarrow$$

$$B\left(x_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \times \ldots \times B\left(x_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B\left(x_1, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq A_1 \\ \vdots \\ B\left(x_n, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subseteq A_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in A_1^o \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \in A_n^o \end{cases} \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_n) \in A_1^o \times \ldots \times A_n^o$$

Συνεπώς έχω το ζητούμενο

! Την αποδειξη για το (2) Σπιτι

Ορισμος: Εστω (E,ρ) μ.χ και συνολο $A \subseteq E$. Το A θα λεγεται πυκνο αν $A \subseteq E \iff \bar{A} = E$

Προταση

Ενα συνολο A ειναι πυκνο εν E αν και μονο αν για καθε μη κενο και ανοικτο υποσυνολο B του E ισχυει $A \cap B \neq \emptyset$

Αποδειξη

Εστω A πυκνο εν. E, δηλ. $\bar{A} = E$ και εστω $B \neq \emptyset$, B ανοικτο υποσυνολο του E. Θ.δ.ο $A \cap B \neq \emptyset$

Θεωρουμε τυχον $x \in B$. Τοτε $(\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq B$ γιατι B ανοικτο. Ομως $x \in B \subseteq E = \bar{A}$ ($\Rightarrow$ απο Θεωρ.)

Αρα $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow[B(x,r)\cap A \subseteq B \cap A]{B(x,r) \subseteq B \Rightarrow} B \cap A \neq \emptyset$

(Αντιστροφα): Εστω οτι ισχυει $\forall B \neq \emptyset$, B ανοικτο $B \cap A \neq \emptyset$. Θ.δ.ο $\bar{A} = E$, δηλ. ανοικτο.

Αρκει ν.δ.ο $E \subseteq \bar{A}$. Εστω x τυχον με $x \in E$ και $B(x,r)$ τυχουσα περιοχη του x

Αρα απο υποθεση $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

Εφαρμογή

Έστω D πυκνό υποσύνολο ενός μ.χ. και A ανοιχτό υποσύνολο του χώρου. Νδο $\bar{A} = \overline{D \cap A}$

Απόδειξη

Προφανή το ότι $D \cap A \subseteq A \Rightarrow \overline{D \cap A} \subseteq \bar{A}$

Συνεπώς αρκεί νδο $\bar{A} \subseteq \overline{D \cap A}$

Έστω x τυχόν στοιχείο με $x \in \bar{A}$ και $B(x,r)$, $r>0$ μια τυχούσα περιοχή του x.

$B(x,r)$ ανοιχτό, A ανοιχτό $\Rightarrow B(x,r) \cap A$ ανοιχτό

Επίσης $x \in \bar{A} \Rightarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\xrightarrow[\text{προς}]{D \text{ πυκνό}}$

$(B(x,r) \cap A) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r) \cap (A \cap D) \neq \emptyset \Rightarrow$
$x \in \overline{A \cap D}$

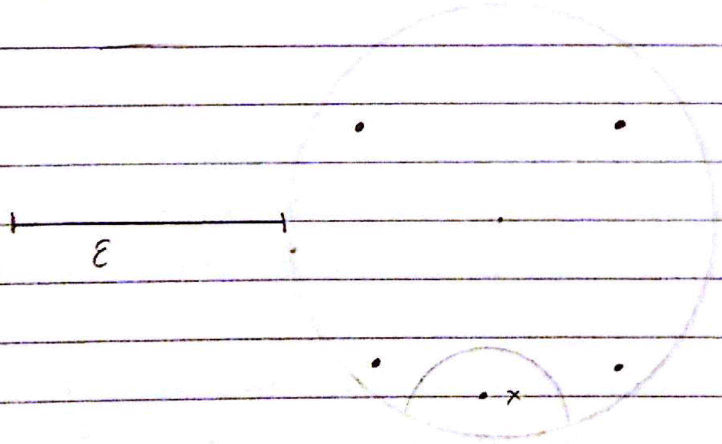
Δηλαδή $\bar{A} \subseteq \overline{D \cap A}$

Συνεπώς η απόδειξη πλήρης

Πρόταση

$A \subseteq E$, $\varepsilon > 0$

A είναι ε-πυκνό εν $E \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists y \in A)\ \rho(x,y) < \varepsilon$



Προταση

Ενα υποσυνολο A ενος μ.χ ειναι πυκνο εν E αν και μονο αν το A ειναι ε-πυκνο εν E για καθε $\varepsilon > 0$

Αποδειξη

Εστω A ειναι πυκνο εν E και εστω $\varepsilon > 0$ τυχον.

Θ.δ.ο A ειναι ε-πυκνο εν E

Εστω τυχον $x \in E = \bar{A}$ (αφου A πυκνο) $\rightarrow$ γι x σημειο επαφης

Θεωρω την $B(x, \varepsilon)$. Τοτε $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Δηλ. $\exists\, y \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Τοτε

$y \in A$ και $\rho(x,y) < \varepsilon$

(Αντιστροφα): Εστω A ειναι ε-πυκνο για καθε $\varepsilon > 0$

Θ.δ.ο A πυκνο, δηλ. $\bar{A} = E$ δηλ. $E \subseteq \bar{A}$

Εστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0$ τυχον

Τοτε $(\exists\, y \in A)$ $\rho(x,y) < \varepsilon$ δηλ.

$\exists\, y \in A$: $y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow y \in B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Αρα $x \in \bar{A}$

Σχολια

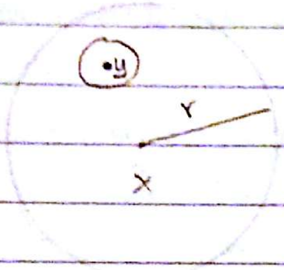
① Νδο το συνολο $\mathbb{Z}$ ειναι πυκνο υποσυνολο του A

② $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ παραμενει ισχυουσα αν $\mathbb{R}$ διακριτος μ.χ

† Νικολιδάκης †

Εφαρμογή /Άσκηση (από προηγούμενη φορά)

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq E \\ (E,\rho) \text{ μ.χ} \end{array}\right\} \Rightarrow A'$ κλειστό



$y \in B(x,r) - \{x\}$ δηλ. $y \neq x$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B(y,\delta) \subseteq B(x,r) - \{x\}$

1. $y \in B(x,r) \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : B(y,\delta_1) \subseteq B(x,r)$
2. $y \neq x \quad \rho(x,y) > 0$

$\delta_2 = \rho(x,y) > 0$ με $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow B(y,\delta) \subseteq B(x,r) - \{x\}$

Κεφάλαιο 2ο: Ακολουθίες στον μ.χ

Εισαγωγικά

$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(1) = a_1$

$a(2) = a_2 \in \mathbb{R}$

$\vdots$

$a(\nu) = a_\nu$ έστω $a_\nu = \frac{1}{\nu}$

$\hookrightarrow \mathbb{N}$

Ορισμός: Έστω (E,ρ) μ.χ. Μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in N}$, είναι μια συνάρτηση $a : N \to E$ δηλ. $a_\nu \in E$, $\forall \nu \in N$ όπου N κάτω φραγμένο, απέραντο $\subseteq \mathbb{Z}$

Το N δεν είναι το σύνολο φυσικών. Μπορεί να είναι διάστημα, τομή διαστημάτων ή και οι φυσικοί $(\mathbb{N})$ κτλ...

Ορισμός Έστω ℓ στοιχείο του E και $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο E. $(a: \mathbb{N} \to E)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ έχει όριο το ℓ ή ότι η ακολουθία συγκλίνει στο ℓ αν η πραγματική ακολουθία $\rho(a_\nu,\ell)$ είναι μηδενική

! $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \overset{\text{op}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}) : \forall n>n_0 \quad \rho(a_n,\ell)<\varepsilon$

Συμβ: $(\rho(a_\nu,\ell))_{\nu\in\mathbb{N}}$

! $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Leftrightarrow \rho(a_\nu,\ell) \to 0$

! $a_\nu \xrightarrow{(\mathbb{R},|\cdot|)} \ell \Leftrightarrow |a_n-\ell| \to 0 \Leftrightarrow \lim a_\nu = \ell$

Πρόταση (Μοναδικότητα Ορίου)

Μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ σ' ένα μετρικό χώρο (E,ρ) έχει το πολύ ένα όριο.

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &\xrightarrow{\rho} \ell_1 \\ a_\nu &\xrightarrow{\rho} \ell_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ell_1=\ell_2$$

Απόδειξη

$0 \le \rho(\ell_1,\ell_2) \le \rho(\ell_1,a_\nu)+\rho(a_\nu,\ell_2) = \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(\ell_1,a_\nu)+\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(\ell_2,a_\nu)$

$\Rightarrow \rho(\ell_1,\ell_2) \le 0+0=0 \Rightarrow \rho(\ell_1,\ell_2)=0 \Rightarrow \ell_1=\ell_2$

→ Μπορούμε να το πάμε και με απαγωγή σε άτοπο (σπίτι)

Προταση

Εστω $(a_n)_{\nu \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθια και $\ell \in E$. Τοτε τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

1. $a_\nu \xrightarrow{\rho} \ell$

2. $\forall U(\ell)$ περιοχη του ℓ : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n \in U(\ell)$ $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$

Αποδειξη

$(1 \Rightarrow 2)$ $a_\nu \xrightarrow{\rho} \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\rho(a_\nu, \ell) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\Big\}$ ⊛

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ $a_\nu \in B(\ell, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$

Θδο ισχυει το ②

Αν $U(\ell)$ περιοχη ℓ $\exists \varepsilon > 0$ $B(\ell, \varepsilon) \subseteq U(\ell)$

Αρα απο ⊛ εχουμε το ζητουμενο $1 \Rightarrow 2$

$(2 \Rightarrow 1)$ Αμεσο απο ⊛

⊛ $(\mathbb{R} = E, \rho = |\cdot|)$

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{\rho} 0$

διακριτη μετρικη

$(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ ισχυει $a_n \xrightarrow{\rho_\delta} 0$

αν $a_n \xrightarrow{\rho_\delta} 0$ $\Leftrightarrow$ $\rho_\delta(a_n, 0) \to 0$ " $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0$ $\rho_\delta(a_n, 0) < \varepsilon$ " ②

Αν ισχυει η ② για $\varepsilon = 1$

$\Leftrightarrow$ $\exists n_0(1) = n_0$ $\rho_\delta(a_n, 0) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\exists n_0$ $\rho(a_n, 0) = 0$ $\forall n \geq n_0$

$a_n = 0$

Σχολιο (για ασκηση που ειχαμε κανει)

$E = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχης στο $[a,b] \}$

$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$, $\rho(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$

$\exists x_0 : f(x_0) > g(x_0)$, Παιρνω $h(x) = f(x) - g(x)$, $h(x_0) = \delta > 0$

$\forall y \in \left[x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right]$ $h(y) \geq \frac{\delta}{2}$ ....